ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ[1]

Σχόλιο [ΔΜ1]: Ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μία αλγεβρική παράσταση που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων

ΕΡΓΑΛΕΙΑ* (ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ)

1. κοινός παράγοντας
2. ταυτότητες
3. τριώνυμο
4. ομαδοποίηση
5. τέχνασμα

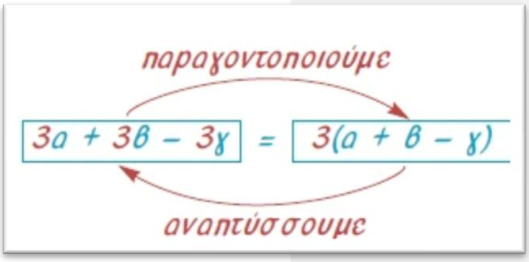
*ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

1. κοινός παράγοντας

➲ επιμεριστική ιδιότητα

$\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta+\gamma)$

$\alpha\cdot\beta - \alpha\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta-\gamma)$



$$12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2 = \\ = 6xy\cdot 2x - 6xy\cdot 5y + 6xy\cdot xy = \\ = 6xy(2x - 5y + xy)$$

$$\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega) = \\ = \alpha(\omega - x) - 3\beta(\omega - x) = \\ = (\omega - x)(\alpha - 3\beta)$$

$$3(2x - 1) + x(4x - 2) = \\ = 3(2x - 1) + 2x(2x - 1) = \\ = (2x - 1)(3 + 2x)$$

Σχόλιο [ΔΜ2]: Παρατηρούμε ότι το πλήθος των όρων της παράστασης πριν βγάλουμε το κοινό παράγοντα είναι ίσο με το πλήθος των όρων που μένουν μέσα στην παρένθεση αφού βγάλουμε το κοινό παράγοντα

[1] http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGYM-C104/470/3110,12505/

2. ταυτότητες

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$

$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3$

α) $4\beta^2 - 25 = (2\beta)^2 - 5^2 = (2\beta + 5)(2\beta - 5)$

β) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 =$

$(3x - 1 + 9)(3x - 1 - 9) =$

$(3x + 8)(3x - 10)$

γ) $\alpha^2 - 7 = \alpha^2 - (\sqrt{7})^2 = (\alpha - \sqrt{7})(\alpha + \sqrt{7})$

α) $4\alpha^2 + 12\alpha + 9 = (2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2 = (2\alpha + 3)^2$

β) $\alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 5\beta + (5\beta)^2 =$
$= (\alpha - 5\beta)^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1 = -(4y^2 - 4y + 1) =$
$= -\left[(2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2\right] =$
$= -(2y - 1)^2$

$$x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=(x+2)^3$$

$$8x^3-60x^2+150x-125=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 5+3\cdot 2x\cdot 5^2-5^3=(2x-5)^3$$

3.

a. τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$

Σχόλιο [ΔΜ3]: Το τριώνυμο στο οποίο αναφερόμαστε σ'αυτή τη φάση .

$$x^2 \overset{(-2)+(-6)}{-8}x + \underset{(-2)\cdot(-6)}{12} = (x-2)(x-6)$$

Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 8x + 12$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 12 και άθροισμα -8. Οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι αρνητικοί, αφού έχουν γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι το -2 και το -6.

b. τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Σχόλιο [ΔΜ4]: Αυτή είναι η γενική μορφή του τριωνύμου η οποία αναφέρεται στη σελίδα 96 του σχ.βιβλίου.

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση $2x^2 + 5x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις -1 και $-\frac{3}{2}$ *(παράδειγμα 1α)*.

Άρα το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 3$ γράφεται

$$2x^2 + 5x + 3 = 2[x-(-1)]\left[x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 2(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

Ομοίως η εξίσωση $-16x^2 + 8x - 1 = 0$ έχει μία διπλή λύση, την $x = \frac{1}{4}$ *(παράδειγμα 1γ)*.

Άρα το τριώνυμο $-16x^2 + 8x - 1$ γράφεται

$$-16x^2 + 8x - 1 = -16\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) = -16\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$$

4. ομαδοποίηση

$$ax + ay + 2x + 2y = a(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(a + 2)$$

$$ax + ay + 2x + 2y = x(a + 2) + y(a + 2) = (a + 2)(x + y)$$

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^3(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^3 + 5)$

β) $αβ - 3α - 3β + 9 = α(β - 3) - 3(β - 3) = (β - 3)(α - 3)$

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 = 3x(x + y) + 2y(x + y) = (x + y)(3x + 2y)$.

Σχόλιο [ΔΜ5]: Η ομαδοποίηση είναι μία διαδικασία κατά την οποία χωρίζουμε την παράσταση σε δύο ή περισσότερες ομάδες και στη συνέχεια για να ολοκληρωθεί η παραγοντοποίηση θα πρέπει να εκτελεστεί σε δύο φάσεις
- **η πρώτη φάση** μεταξύ των όρων των ομάδων
- και **η δεύτερη φάση** μετά τα αποτελέσματα της πρώτης φάσης

σε περίπτωση που δεν είναι δυνατό να εκτελεστεί η δεύτερη φάση ακυρώνουμε τις ομάδες που είχαμε επιλέξει και προχωράμε στην επιλογή άλλων ομάδων

5. τέχνασμα

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 = 3x(x + y) + 2y(x + y) = (x + y)(3x + 2y)$.

Μερικές παραστάσεις παραγοντοποιούνται κατά ομάδες, αν **διασπάσουμε** κατάλληλα έναν ή περισσότερους όρους π.χ.

$$5xy = 3xy + 2xy$$

ΠΩΣ ΚΑΝΟΥΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ;
ΠΟΙΟ ΑΠΟ ΤΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ;
Απάντηση: εξαρτάται από το πλήθος των όρων της παράστασης που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε.

- 2 (δύο) ΟΡΟΙ : αξιοποιούμε με τη σειρά τα εργαλεία
  - 1_ κοινός παράγοντας
  - 2_ ταυτότητες $α^2-β^2=(α-β)(α+β)$
- 3 (τρεις) ΟΡΟΙ : αξιοποιούμε με τη σειρά τα εργαλεία
  - 1 _κοινός παράγοντας
  - 2 _ταυτότητες
    $α^2+2αβ+β^2=(α+β)^2$
    $α^2-2αβ+β^2=(α-β)^2$
  - 3_τριώνυμο
  - 5_τέχνασμα
- 4 (τέσσερις) ΟΡΟΙ: αξιοποιούμε με τη σειρά τα εργαλεία
  - 1 _κοινός παράγοντας
  - 2 _ταυτότητες
    $α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3=(α+β)^3$
    $α^3-3α^2β+3αβ^2-β^3=(α-β)^3$
  - 4_ομαδοποίηση
- περισσότεροι από τέσσερις ΟΡΟΙ:
  - 1 _κοινός παράγοντας
  - 4_ομαδοποίηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

1) $x^2y^3 + xy^2 =$

2) $6x^3y^5 + 3x^2y^2 =$

3) $6x^2y^2w^3 - 2xy^3w =$

4) $\alpha(x+y) - x - y =$

5) $x(a-b) - a + b =$

6) $2\alpha(x-y) + a^2(y-x) =$

7) $-a^2 + b^2c^2 =$

8) $x^2 - 25y^2w^2 =$

9) $8x^2 - 18y^2 =$

10) $a^3 - a =$

11) $x^4 - y^4 =$

12) $a^4 - 36b^2c^2 =$

13) $(x+2y)^2 - x^2 =$

14) $ax^2 - a(x-y)^2 =$

15) $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 =$

16) $x^3 + 6x^2 + 9x =$

17) $4a^3 + 4a^2 + a =$

18) $3x^3y + 3xy^3 + 6x^2y^2 =$

19) $-\alpha^2 - 4\alpha - 4 =$

20) $2xy - x^2 - y^2 =$

21) $-49x^2 - 28ax - 2a^2 =$

22) $(x-1)^2 - 6(x-1) + 9 =$

23) $x^2 + xy + xw + yw =$

24) $a^2 + 2a + ab + 2b =$

25) $3x - 3y + xy - x^2 =$

26) $\kappa\lambda + \lambda\mu - \kappa\mu - \mu^2 =$

27) $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta =$

28) $x^2 + y^2 - x + y - 2xy =$